

Résolution d'un système linéaire:

opérations élémentaires

(Lay p. 5-7)

(sur les lignes / équations
de la matrice (associée) au système)

Remy/Déf: Les opérations suivantes
si faites sur les lignes d'une matrice
ne changent pas l'ensemble solution
du système qui lui correspond.

- 1) Ajouter à une ligne un multiple
d'une autre ligne (quelconque)
- 2) Echanger deux lignes
- 3) Multiplier une ligne par
un nombre non nul

Ce sont les opérations dites élémentaires

Déf: Deux matrices $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$
sont lignes-équivalentes
si l'on peut passer de l'une à l'autre

en faisant une suite (finie)
d'opérations élémentaires
sur les lignes de ces matrices

Rems:

- 1) Si les matrices associées à 2 systèmes
sont lignes-équivalentes
alors les systèmes correspondants
ont même ens. de solution
- 2) les opérations élémentaires
sont "réversibles" ou inversibles

$$\left(\begin{array}{l} l_5 \rightarrow l_5 + 37 l_{18} \\ \text{a pour "inverse"} \\ l_5 \rightarrow l_5 - 37 l_{18} \end{array} \right)$$

Exemple:

système

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases}$$

Matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array} \right)$$

$\updownarrow$

$$l_3 \rightarrow l_3 + 4l_1$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -3x_2 + 13x_3 = -9 \end{cases}$$

$$\updownarrow l_2 \rightarrow \frac{l_2}{2}$$

$$\updownarrow l_3 \rightarrow l_3 + 3l_2$$

 $\updownarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$\Updownarrow \quad l_2 \rightarrow l_2 + 4l_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$\Updownarrow \quad l_1 \rightarrow l_1 - l_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$\Updownarrow \quad l_1 \rightarrow l_1 + 2l_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

système
associé

$$\begin{cases} x_1 = 29 \\ x_2 = 16 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

$S = \{ (29, 16, 3) \}$
une seule
solution.

Questions importantes pour un système *

1) le système * est-il compatible?

(compatible signifie, que le système possède au moins une solution)
càd. $S \neq \emptyset$

2) Si * est compatible

"combien" de solutions possède-t-il?

ex :

0) une équation ^{linéaire}
à une variable (dans $\mathbb{R}$)

$$ax = b$$

$$S = \begin{cases} \left\{ \frac{b}{a} \right\} \\ \emptyset \\ \mathbb{R} \end{cases}$$

• si $a \neq 0$

• si $a = 0$
et $b \neq 0$

• si $a = 0$
et $b = 0$

0,5) 2 eq. lin dans $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} ax + by = c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a'x + b'y = c' \end{cases}$$

← une droite dans le plan $\mathbb{R}^2$

l'ens. solution $S =$ intersection des
2 droites dans
le plan

$$= \begin{cases} 1 \text{ point} & \text{si les droites} \\ & \text{ne sont pas} \\ & \text{parallèles} \\ \emptyset & \text{si les droites} \\ & \text{sont} \\ & \text{parallèles} \\ 1 \text{ droite} & \text{si les droites} \\ & \text{sont} \\ & \text{confondues} \end{cases}$$

$$1) x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

1 eq. à 3 inconnues : cela donne un plan
dans $\mathbb{R}^3$

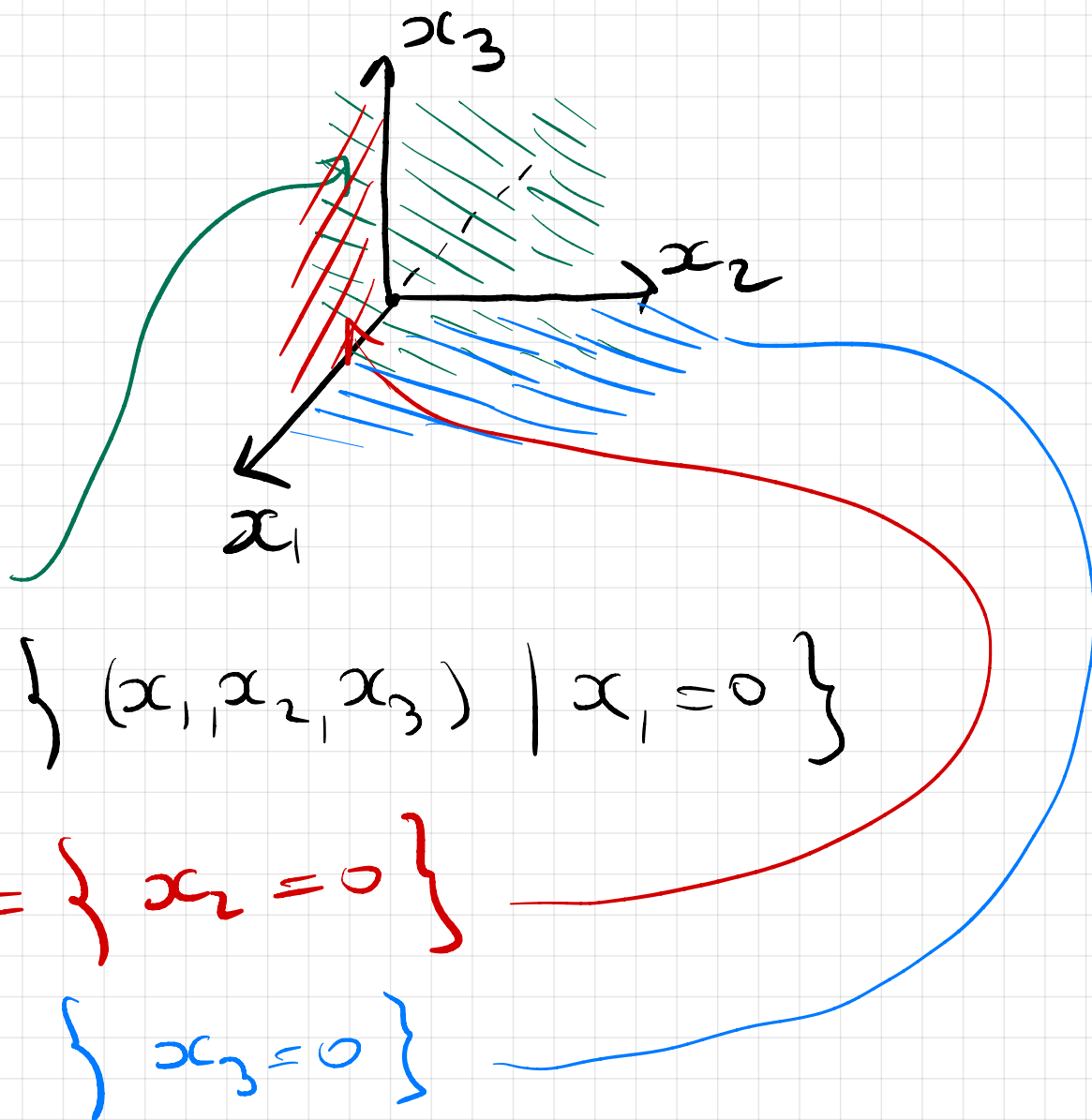
plus généralement l'équation

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$$

avec $(a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0)$

est l'équation d'un plan perpendiculaire
au "vecteur" (a_1, a_2, a_3)

1.5) $x_1 = 0$ dans $\mathbb{R}^3$



$$\pi_1 = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = 0 \}$$

$$\pi_2 = \{ x_2 = 0 \}$$

$$\pi_3 = \{ x_3 = 0 \}$$

2) deux équations lin. à 3 variables
vont donner l'intersection
de deux plans dans $\mathbb{R}^3$

$$S = \begin{cases} \emptyset & \text{si les plans sont parallèles} \\ \text{une droite, si les plans sont} & \text{sécants} \\ \text{un plan, si les plans sont} & \text{confondus} \end{cases}$$

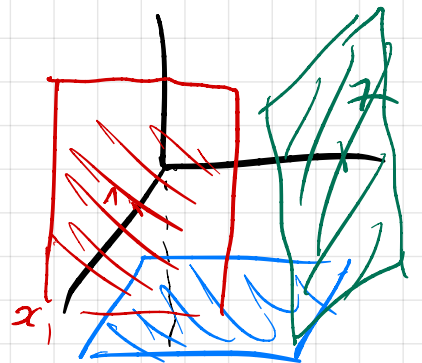
3) 3 eq. lin dans $\mathbb{R}^3$
= l'int. de 3 plans

$$S = \begin{cases} \emptyset \\ 1 \text{ point} \\ 1 \text{ droite} \\ 1 \text{ plan} \end{cases} \quad (\text{pause}).$$

3.1) cas banal.

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 7 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

$$S = \{(1, 7, -2)\}$$



3.2) système à param. ($k \in \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + kx_3 = 1 \end{cases}$$

$$S = \begin{cases} \emptyset & \text{si } k = -2 \\ \text{un plan} & \text{si } k = 1 \\ \text{un point unique} & \text{si } k \neq 1, -2 \end{cases}$$

§ 1.2 Forme échelonnée et
alg. du pivot (Gauss-Jordan)
(Lay p. 13-19) (Chang Tsang)
- 200 BCE

Def: Soit A matrice de taille $m \times n$

le coefficient principal d'une ligne
non-nulle de A est le coefficient $\neq 0$
le plus à gauche

ex:

$$\begin{pmatrix} 0 & \textcircled{-3} & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{11} \\ \textcircled{-2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On dit que A est échelonnée (selon les ^{lignes}) si

1. Toute ligne au dessous d'une ligne nulle est nulle
2. le coeff. principal d'une ligne (non-nulle) de A se trouve dans une colonne plus à droite de celle du coeff. principal de la ligne au dessus d'elle
- (3. Tous les coeff. en dessous d'un coeff. principal sont nuls)

Si de plus A vérifie

4. le coeff. principal de chaque ligne vaut 1
 5. les coeff. principaux sont les seuls éléments non nuls de leur colonne
- on dira que A est échelonnée réduite

ex :

$$\begin{pmatrix} 0 & \textcircled{6} & 4 & 2 \\ 0 & 0 & \textcircled{-2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \end{pmatrix}_{3 \times 4}$$

échelonnée
non réduite

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \end{pmatrix}_{3 \times 5}$$

échelonnée
réduite

Rem : résoudre un système qui a une matrice associée échelonnée (réduite) est plus facile

Théorème 1 :

Toute matrice $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

est ligne-équivalente à une et une seule matrice échelonnée réduite U

que l'on nomme la forme échelonnée réduite de A
(R.E.F)

Voc : Soit $A = (a_{ij})$ une matrice

$$\begin{pmatrix} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{pmatrix}$$

- On nomme position pivot de A l'emplacement (i, j) d'un coefficient de la forme échelonnée réduite de A .
- Une colonne-pivot de A est une colonne qui contient une position pivot.
- Un pivot de A est un nombre (non-nul) de la forme éch. (réduite) de A se trouvant en position pivot de A .

ex : $l_3 \rightarrow l_3 - l_2$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$l_2/2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$l_2 \rightarrow l_2 - l_1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad l_3 \rightarrow l_3 - l_2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 0 & 1 \\ 0 & \textcircled{1} & -3 \\ 0 & 0 & \textcircled{6} \end{pmatrix}$$

(positions pivots : $\begin{pmatrix} (1,1) \\ (2,2) \\ (3,3) \end{pmatrix}$)

Algorithme du pivot - partant de A .

Le procédé ci-dessus abatit A à la forme échelonnée réduite de A

1. On prend la 1^{ère} col. non nulle de A c'est une colonne-pivot et la position pivot est en haut de cette colonne.
2. On prend comme pivot un élément non nul de la colonne pivot (quitte à échanger des lignes)
3. Faire apparaître des 0 en dessous du pivot trouvé plus haut en faisant des opérations elem. du premier type

4. On ignore la ligne ^{et la colonne} contenant le pivot
 ci-dessus, on applique les étapes
 1-2-3 à la matrice restante
 jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de
 ligne non-nulle à modifier

5. On fait apparaître des 0
 au dessus des pivots
 (et on divise par la val. du pivot
 pour avoir que des 1 comme
 pivots)

ex. $\begin{pmatrix} \textcircled{0} & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_3} \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{l_2 - l_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{l_2 \leftrightarrow l_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

bonne colonne

échelonnée

$$l_2/2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$l_2 \rightarrow l_2 - l_3/2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$l_1 \rightarrow l_1 - l_2$

Solutions d'un système linéaire (p 19)

Voc: Si A est une matrice

- On appelle variable principale (ou liée) toute variable corresp. à une colonne pivot de A
- On appelle variable libre (ou secondaire) les inconnues qui ne sont pas dans des colonnes pivots

ex:

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{3} \end{pmatrix}$$

↑ ↑ ↑

└──────────────────┘ col. pivot

variables libres : x_2, x_4

variables liées : x_1, x_3, x_5

Représenter l'ens. sol. en fonction des variables libres

Ex:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \\ x_4 = 5 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 5 \end{array} \right)$$

variable libre, x_2

on pose $x_2 = t$ et on exprime

les autres variables en fonction de t

on trouve

$$x_1 + x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1 - t$$

$$\Rightarrow S = \{ (1-t, t, 2, 5) \mid t \in \mathbb{R} \}$$

 c'est une droite dans $\mathbb{R}^4$

Fin. cours 1.2.